

2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας

✿ Τι θα μάθουμε

- Τι ονομάζουμε εφαπτομένη γωνίας
- Τι ονομάζουμε κλίση ευθείας
- Τι ονομάζουμε κλίση δρόμου

✿ Μαθαίνουμε

(1) Τι ονομάζουμε λόγο δύο ευθυγράμμων τμημάτων;

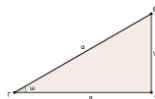
Ονομάζουμε **λόγο** δύο **ευθυγράμμων τμημάτων**, που έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης, τον λόγο των μηκών τους.

(2) Τι ονομάζουμε εφαπτομένη γωνίας;

Εφαπτομένη μιας **οξείας γωνίας**

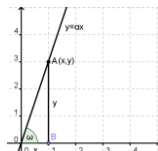
ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζουμε το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά της.

$$\text{π.χ. } \epsilon\phi\omega = \frac{\gamma}{\beta}$$



(3) Τι ονομάζουμε **κλίση** ευθείας;

Κλίση **a** μιας ευθείας με εξίσωση $y = ax$ ονομάζουμε τον σταθερό αριθμό **a** και ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$.



(4) Τι ονομάζουμε κλίση δρόμου;

Κλίση δρόμου ονομάζουμε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει ο δρόμος με το οριζόντιο επίπεδο και εκφράζεται επί τις εκατό.



Παραδείγματα-Εφαρμογές-Μεθοδολογία

Παράδειγμα 1°

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 20 cm. Αν η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος ΑΒ = 16 cm, να υπολογίσετε τις εφαπτόμενες των γωνιών Β και Γ.

Λύση:

Με το Πυθαγόρειο υπολογίζω την κάθετη πλευρά ΑΓ.

$$20^2 = 12^2 + ΑΓ^2$$

$$400 = 144 + ΑΓ^2$$

$$400 - 144 = ΑΓ^2$$

$$256 = ΑΓ^2$$

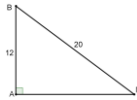
$$ΑΓ = \sqrt{256}$$

$$ΑΓ = 16$$

Έτσι:

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$



2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

✿ Τι θα μάθουμε

- Τι ονομάζουμε ημίτονο γωνίας.
- Τι ονομάζουμε συνημίτονο γωνίας.
- Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ημίτονο και συνημίτονο.

✿ Μαθαίνουμε

(1) Τι ονομάζουμε ημίτονο γωνίας;

Ημίτονο μιας **οξείας γωνίας** ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζουμε το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\text{π.χ. } \eta\mu\omega = \frac{\gamma}{\alpha}$$



(2) Τι ονομάζουμε συνημίτονο γωνίας;

Συνημίτονο μιας **οξείας γωνίας** ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζουμε το πηλίκο της προσκειμένης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\text{π.χ. } \sigma\upsilon\eta\omega = \frac{\beta}{\alpha}$$



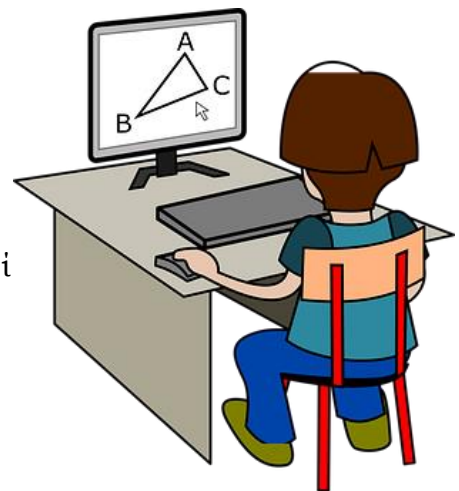
(5) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ω;

$$0 < \eta\mu\omega < 1$$

$$0 < \sigma\upsilon\eta\omega < 1$$

Παρατηρήσεις:

- Το ημίτονο μιας οξείας γωνίας ισούται με το συνημίτονο της συμπληρωματικής της.
- Το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ισούται με το ημίτονο της συμπληρωματικής της.



Παραδείγματα-Εφαρμογές-Μεθοδολογία

Παράδειγμα 1^ο

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και κάθετες πλευρές με μήκη 12 και 16. Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $\hat{B}$.

Λύση

Με το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζω την υποτείνουσα x.

$$x^2 = 16^2 + 12^2$$

$$x^2 = 256 + 144$$

$$x^2 = 400$$

$$x = \sqrt{400}$$

$$x = 20$$

$$\eta\mu\hat{B} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$



Πυθαγόρας ο Σάμιος



2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30, 45 και 60 μοιρών

✿ Τι θα μάθουμε

• Ποιο είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60° .

• Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 30° , 45° , 60°

ω	30°	45°	60°
$\eta\mu\omega$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\epsilon\varphi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Σχόλιο

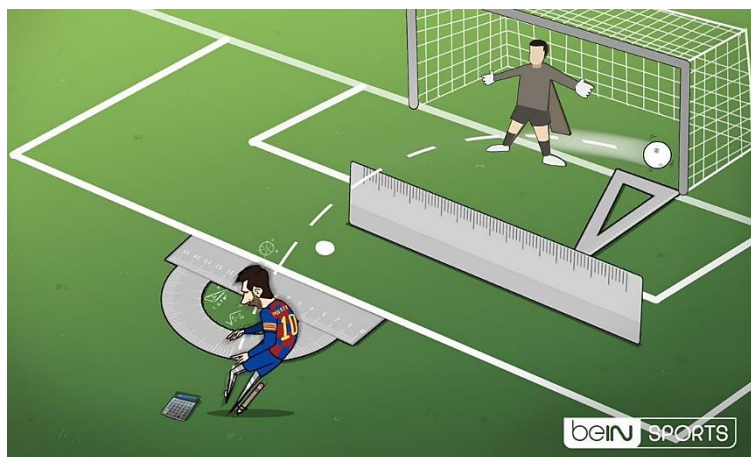
Για πιο εύκολη απομνημόνευση των τριγωνομετρικών αριθμών των χαρακτηριστικών γωνιών 30° , 45° , 60° .

Γράφουμε τους αριθμούς	1	2	3
Βάζουμε τετραγωνικές ρίζες	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4}$
Υπολογίζουμε αυτές όπου μπορούμε	1	$\sqrt{2}$	2
Διαιρούμε με το 2	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Έτσι έχουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30° , 45° , 60° για το ημίτονο.

Για να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του συνημιτόνου απλά γράφουμε τους αριθμούς από τον μεγαλύτερο προς τον μικρότερο, δηλαδή $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$

Για να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της εφαπτομένης διαιρούμε τις τιμές του ημιτόνου με τις αντίστοιχες του συνημιτόνου, δηλαδή:



Η Τριγωνομετρία του ...Μέσι

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi 30^\circ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \varepsilon\varphi 45^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \\ \varepsilon\varphi 60^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

<https://goal.philenews.com/podosfero/diethni/la-liga/i-trigonometria-toy-mesi/>